Day 05

メモリ 4 ビットで表現できる数値

Kotaro Sonoda @helmenov

---

1. 4bit で表現できる数値の種類

4bit で表現できる数値の集合 Ω は,

$$\Omega = \{(0000), (0001), \ldots, (1110), (1111)\}$$

要素の数は？

$$16\text{種類}$$

ですね．$(16 = 2^4)$

---

2. 自然数 (符号無し整数,unsigned integer)

高校で習う 2 進数変換では，自然数を表現しています．4bit では 16 種類の自然数 (0〜15) を表現します．

- $0000_{(2)}$ -> $0_{(10)}$
- $0001_{(2)}$ -> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^3 \\ 2^2 \\ 2^1 \\ 2^0 \end{pmatrix} = 2^0 = 1_{(10)}$
- $0010_{(2)}$ -> $2^1 = 2_{(10)}$
- $0011_{(2)}$ -> $2^1 + 2^0 = 3_{(10)}$

$\vdots$

- $1111_{(2)}$ -> $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15_{(10)}$

---

3. 整数（符号付き整数, integer)

16 種類を正と負，半々に割り振ります．つまり，-8 〜 7 の 16 種類を表現することにします．

2 の補数表現

- **最高位桁を正負の符号と定義する (0: 正，1: 負)**
- 最高位桁を除いたビット列で正の整数を表す．
    - $(000) : 0$ 〜 $(111) : 7$
- $(1\,0000) \equiv (0000)$ **と定義する**
- 負の整数「$-n$」の 2 進数表記 $X_{(2)}$ は，対応する正の整数「n」の 2 進数表記 $N_{(2)}$ と「$X + N = 0$」の関係にある．

Q1: $(-5)_{(10)}$ を２進数表記せよ

$\mathrm{X}_{(2)} = (-5)_{(10)}$　とすると，

$$\begin{aligned}(+5)_{(10)} + (-5)_{(10)} &= (0)_{(10)} \\ (0101)_{(2)} + X_{(2)} &= (1\,0000)_{(2)} \\ &= (1111) + (0001) \\ X &= (1010) + (0001) = (1011)\end{aligned}$$

したがって，$(-5)_{(10)} = (1011)_{(2)}$

Q2: $(1101)_{(2)}$ を１０進数表記せよ

$(1101)_{(2)} = -n_{(10)}$ で，$n_{(10)} = N_{(2)}$ とする．

$$\begin{aligned}(-n)_{(10)} + n_{(10)} &= 0_{(10)} \\ (1101)_{(2)} + N_{(2)} &= (1\,0000)_{(2)} \\ &= (1111)_{(2)} + (0001)_{(2)} \\ N_{(2)} &= (0010)_{(2)} + (0001)_{(2)} \\ &= (0011)_{(2)} \\ n_{(10)} &= 3_{(10)}\end{aligned}$$

したがって，$(1101)_{(2)}$ は $3_{(10)}$ である．

---

4. 小数点付き符号無し２進数

改めて 10 進数の小数を眺めると,

$$3.14_{(10)} = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

であった．小数点の左に行くほど $10^0, 10^1, ...$，右に行くほど $10^{-1}, 10^{-2}, ...$ の位となっている．

２進数の場合も同様である．

$$\begin{aligned}
(01.01)_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^1 \\ 2^0 \\ 2^{-1} \\ 2^{-2} \end{pmatrix} \\
&= 2^0 + 2^{-2} = 1 + 1/4 \\
&= \left(\frac{5}{4}\right)_{(10)}
\end{aligned}$$

Q: $(3.14)_{(10)}$ を小数点付き符号なし２進数で小数点以下４桁まで表記せよ．

$2^1 \leq (3.14)_{(10)} < 2^2$ であるから,

$$(3.14)_{(10)} = 1 \cdot 2^1 + (1.14)$$

$2^0 \leq (1.14)_{(10)} < 2^1$ であるから,

$$(3.14)_{(10)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + (0.14)$$

$2^{-3} \leq 0.14 < 2^{-4}$ であるから,

$$(3.14)_{(10)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-3} + (0.015)$$

$2^{-7} \leq 0.015 < 2^{-8}$ なので

$$\begin{aligned}
(3.14)_{(10)} &= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-7} + ... \\
&= 2^{-4} \left\{ 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-3} + ... \right\} \\
&\sim 2^{-4} \cdot (110010)_{(2)} \\
&= (11.0010)_{(2)}
\end{aligned}$$

ちなみに，$(11.0010)_{(2)} = (3.125)_{(10)}$ である．

---

4 ビットで表せる小数点付き符号なし小数

- (.0000)〜(.1111): $0, 0.0625, \dots, 0.9375$ $\left(\frac{1}{2^4}\text{刻み}\right)$
- (1.000)〜(1.111): $1.0, 1.125, \dots, 1.875$ $\left(\frac{1}{2^3}\text{刻み}\right)$
- (10.00)〜(11.11): $2, 2.25, \dots, 3.75$ $\left(\frac{1}{2^2}\text{刻み}\right)$
- (100.0)〜(111.1): $4, 4.5, \dots, 7.5$ $\left(\frac{1}{2}\text{刻み}\right)$
- (1000.)〜(1111.): $8, 9, \dots, 15$ (1刻み)

しかし，小数点の位置を別途保存する必要あり．

---

5. 正の浮動小数点小数

4bit のうち数 bit を小数点位置を表すために使う．

- 上位 $k$bit [`a,b,c`] を小数点位置を表す指数部 S のために使う．
  - $S = (abc)_{(2)} - 2^{k-1}$
  - 情報処理技術者試験の場合，負の指数部は 2 の補数表現 $S = (111) - (abc) + (001)$
- 残りのビット列を [`d,e,f`] としたとき，仮数部 N は，$N = (1.def)_{(2)}$
- $N \cdot 2^S$
- 符号付き浮動小数点小数の場合は，最高位の桁 1 ビットを正負符号用に充てる．最高位ビットが 1 のとき負，0 のとき正
- (000_0)
  - S(`000`) $= (000)_{(2)} - 2^2 = -4$
  - N(`0`) $= (1.0)_{(2)} = 1$
  - したがって $1 \cdot 2^{-4} = (0.0625)_{(10)}$
- (000_1)
  - S $= -4$
  - N(`1`) $= (1.1)_{(2)} = \frac{3}{2}$
  - したがって，$\frac{3}{2} \cdot 2^{-4} = (0.09375)_{(10)}$
- (111_1)
  - S(`111`) $= (111)_{(2)} - 2^2 = 7 - 4 = 3$
  - N $= \frac{3}{2}$
  - したがって，$\frac{3}{2} \cdot 2^3 = 12$